# Direkte-, indirekte- og kontrapositions beviser.

Analyse af den logiske struktur og bevis for ræsonnementernes gyldighed

FIL:BEVISER1.MAT Ni

Først gives et eksempel på hver af de tre bevistyper: Direkte bevis, indirekte bevis og kontrapositionsbevis. Dernæst formuleres eksemplerne med Peanos symboler: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, og $\Leftrightarrow$. Til sidst generaliseres bevisernes logiske struktur, og der føres bevis for, at de udsagn, der ligger bag ræsonnementerne er tautologier.
Jeg forudsætter, at læseren er fortrolig med sandhedstabellerne for $\neg$, $\wedge$ og $\Rightarrow$, at læseren kan udfylde sandhedstabeller for sammensatte udsagn; samt at læseren kender hovedindholdet af begreberne logisk ækvivalens og tautologi[1].

## Et direkte bevis

Sætning:

Hvis n er lige så er $n^2$ lige.

Bevis:

$$n..lige \Rightarrow n = 2m..,m \in N \Rightarrow$$
$$n^2 = 4m^2 = 2(2m^2) = 2k..,k \in N \Rightarrow n^2..lige$$

Vi starter altså med et udsagn p , der forudsættes sandt: "n er lige". Dernæst foretages nogle lovlige manipulationer. En lovlig manipulation er her en manipulation, hvor et sandt udsagn ikke gøres til et falsk udsagn; altså hvor der er $\Rightarrow$ mellem udsagnet før manipulationen og udsagnet efter manipulationen. Til sidst ender vi så med det udsagn q, som vi ville bevise:"$n^2$ er lige".

Vi kan nu formulere indholdet i et **direkte bevis** generelt:

**Hvis p er sandt og p medfører q så er q sandt.**
$$\big(p \wedge (p \Rightarrow q)\big) \Rightarrow q$$

Det direkte bevis er naturligvis kun gyldigt, hvis udsagnet ovenfor er en tautologi - det vil sige altid sandt. At dette er tilfældet fremgår af nedenstående sandhedstabel,

| p | q | $p \Rightarrow q$ | $p \wedge (p \Rightarrow q)$ | $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| s | s | s | s | s |
| s | f | f | f | s |
| f | s | s | f | s |
| f | f | s | f | s |

[1]Se eventuelt: "På søndagstur i logikkens have", Knud Nissen, Abacus 1991.

## Det indirekte bevis

Som eksempel kan nævnes beviset for, at længden af diagonalen i et kvadrat med siden en, er et irrationalt tal. Vi antager så først, at længden af diagonalen er et rationalt tal. Dernæst udføres nogle lovlige omformninger, hvorefter vi ender med et falsk udsagn. Vi plejer at sige, at vi har ført det negerede udsagn til vores påstand frem til en modstrid.

Strukturen i det indirekte bevis er således:

Hvis (ikke p) medfører q og q er falsk så er p sand.

$\big(((\neg p) \Rightarrow q) \wedge \neg q\big) \Rightarrow p$

At ovenstående udsagn er en tautologi fremgår af følgende sandhedstabel:

| p | q | $\neg p$ | $\neg q$ | $(\neg p) \Rightarrow q$ | $((\neg p) \Rightarrow q) \wedge \neg q$ | $((\neg p) \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| s | s | f | f | s | f | s |
| s | f | f | s | s | s | s |
| f | s | s | f | s | f | s |
| f | f | s | s | f | f | s |

## Bevis ved kontraposition

Sætning:

Hvis $n^2$ er lige, så er n også lige. $(p \Rightarrow q)$

Bevis:

Det er nok at vise, at hvis n er ulige så er $n^2$ også ulige. $(\neg q \Rightarrow \neg p)$

$$n..ulige \Rightarrow$$
$$n = 2m+1..,m \in N \Rightarrow n^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1 = 2r + 1..,r \in N \Rightarrow$$
$$n^2..ulige$$

Vendingen "det er nok at vise" , betyder her:" Er logisk ækvivalent med".

Indholdet i **kontrapositionsbeviset** er derfor:

$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q) \Rightarrow (\neg p)$

Gyldigheden af ovenstående ækvivalens fremgår af sandhedstabellen:

| p | q | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg q \Rightarrow \neg p$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| s | s | f | f | s | s |
| s | f | f | s | f | f |
| f | s | s | f | s | s |
| f | f | s | s | s | s |