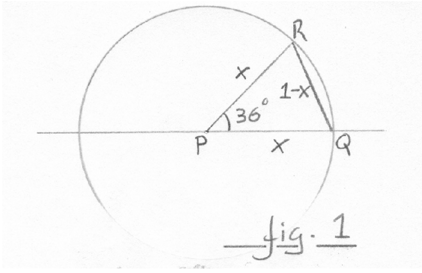
Bestemmelse af sin(3°)

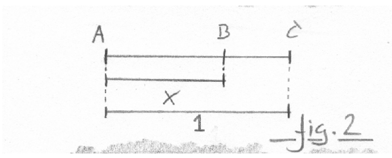
I forbindelse med konstruktion af en regulær femkant, fremkommer der en trekant, der er en tiendedel af en regulær tikant. Denne trekant er ligebenet med topvinkel 36°. Trekanten er vist på figur 1. Det fremgår endvidere af beviset for konstruktionens gyldighed[1], at forholdet mellem sidelængderne i ΔPQR følger det gyldne snit.



Figur 2 viser et linjestykke med længde 1, som er delt ved det gyldne snit i et stort linjestykke med længde x og et mindre stykke med længde (1-x). Betingelsen for, at snittet er "gyldent" er:

$$AB^2 = AC \cdot BC$$

Specielt får vi for et linjestykket af længde en:



$$x_{Gs}{}^2 = 1 \cdot (1 - x_{Gs})$$
$$\Updownarrow$$
$$x_{Gs}{}^2 + x_{Gs} - 1 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x_{Gs} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618033986$$

På næste side vises, at der gælder:

$$x_{Gs} = 2 \cdot \sin(18^\circ)$$

Når vi først har fundet sin(18°) kan vi finde sin(72°) ved to gange vinkelfordobling. Sinus til den dobbelte vinkel findes ved at sætte A = B inedenstående additionsformel[2]:

$$\sin(A \pm B) = \sin(A)\cos(B) \pm \sin(B)\cos(A)$$
$$\Updownarrow$$
$$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$$

Sin(60°) kan findes ud fra den ligesidede trekant. Dernæst findes sin(72°-60°) med additionsformlen . Tilbage er så blot to halveringer, før vi har sin(3°). De muslimske matematikere rådede over en itterativ metode til bestemmelse af tilnærmelser til sin(1°) ud fra sin(3°). Når først sin(1°) er kendt kan en tabel over sinus til heltallige vinkler mellem 0 og sin(90°) udarbejdes. Vi går ikke nærmere ind på beregningen af sin(1°), da metoden kun blev begrundet med erfaringer for, at den virker.

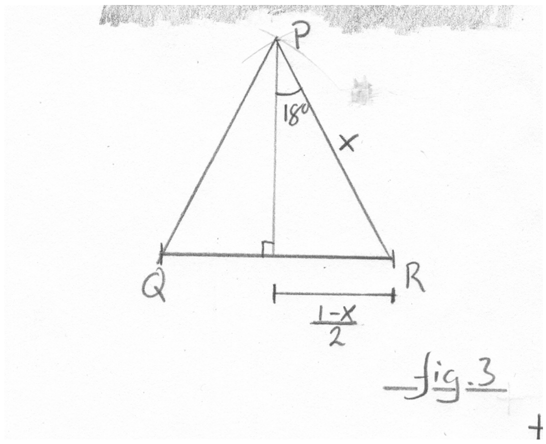
---

[1] J.L.Berggren, "Episodes in the Mathematics og Medival Islam", Springer 1986, p.84-86.

[2] Berggren p.135

Bestemmelse af sin(18°)

Figur 3 viser trekanten fra figur 1 efter en drejning. Den ligebenede trekant opdeles i to retvinklede trekanter. Sin(18°) er forholdet mellem den modstående katete og hypotenusen. Benyttes den ovenfor bestemte værdi af x_{Gs}, får vi:



$$x_{Gs} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\sin(18^\circ) = \frac{\left(\frac{1-x_{Gs}}{2}\right)}{x_{Gs}} = \frac{1-x_{Gs}}{2\cdot x_{Gs}} = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{-1+\sqrt{5}} =$$

$$\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\left(-1+\sqrt{5}\right)} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{x_{Gs}}{2}$$

Så sin(18°) kan beregnes blot ved hjælp af de fire regningsarter, idet kvadratrødder kan uddrages med standardoperationer.

Halvering af vinkler:

$$\sin(A) = \sin\left(\frac{A}{2}+\frac{A}{2}\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\sin^2(A) = 4\cdot\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = 4\cdot\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\left(1-\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin^2(A) = 4\cdot t\cdot(1-t) = -4t^2+4t \quad \wedge \quad t = \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$t = \frac{-4\pm 4\sqrt{1-\sin^2(A)}}{-2} = 2\left(1\pm\sqrt{1-\sin^2(A)}\right)$$

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \left[2\left(1-\sqrt{1-\sin^2(A)}\right)\right]^{1/2}$$

Undervejs er t fundet ved løsning af en andengradsligning. Dernæst vælges den løsning, der giver en sinusværdi, der er mindre end en. Kendes værdien af sin(A) indsættes denne i formlen, og sin(A/2) kan beregnes ved hjælp af formlen.