Additionsformlen for Sinus

Abu l-Wafa´s Bevis fra ca. år 1000.

Hvis A og B er to vinkler, gælder der følgende formel til beregning af sinus til summen - henholdsvis differencen mellem A og B.

$$\sin(A \pm B) = \sin(A) \cdot \cos(B) \pm \cos(A) \cdot \sin(B)$$

Det følgende er en kommenteret oversættelse fra engelsk af J.L.Berggren´s beskrivelse af l-Wafa´s bevis for additionssætningen[1]. Sinusfunktionen var kendt længe før l-Wafas tid, men tidligere defineredes sinus til en vinkel som halvdelen af korden til den dobbelte vinkel jvf. figur 1 nedenfor. Ifølge denne definition afhænger sinus til en vinkel af den betragtede cirkels radius. L-Wafa er den første, vi har kendskab til, som anvender den moderne definition af sinus, der bygger på enhedscirklen. L-Wafa skriver.

Betragt figur 5.9. Antag, at vi kende sinus til de to buer $\frown$AB og $\frown$BC i cirklen ABCD.Vi kan nu finde sinus til deres sum og sinus til deres differens. Forbind punkterne A,B og C med cirklens centrum O.Nedfæld den vinkelrette BT på radius AO og den vinkelrette BH på OC. Forbind H med T og forlæng BT og OH til skæring med cirklen i henholdsvis Z og D. Eftersom radier, der er vinkelrette på korder, halverer disse, gælder der: BH = HD og BT = TZ. Trekanterne BHT og BDZ er ensvinklede og DZ = 2TH. $\frown$ZBD er dobbelt så lang som $\frown$AC, fordi $\frown$ZB = 2 $\frown$AB og $\frown$BD = 2 $\frown$AB. I alt har vi: TH = ½DZ = ½ 2AC = sin(AC)[2]. På samme måde kan man ved hjælp af figur 3 indse, at $\frown$DZ = 2 $\frown$AC, idet $\frown$AB - $\frown$BC = $\frown$AC. For at fuldføre betragtningerne nedfældes den vinkelrette BN fra B på TH

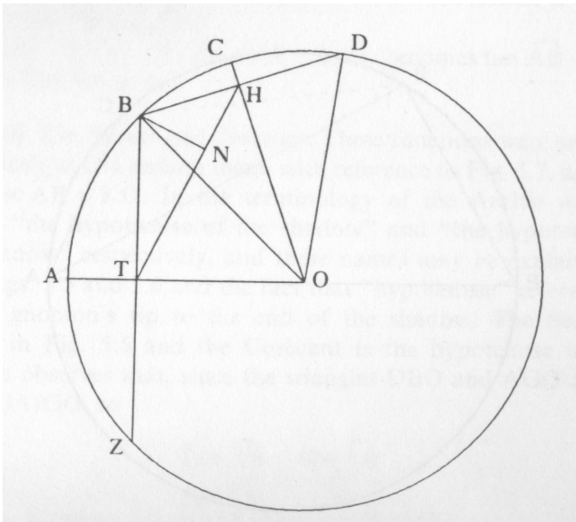


Fig. 5.9

Berggren forklarer så i det følgende hvordan beviset fuldføres ved at betragte de to ensvinklede trekanter ΔBTO og ΔBOH, der indeholder vinklerne A,B og stykket TH = sin(A+B). Påstanden følger så af sætningen om sidernes forhold i ensvinklede trekanter. Berggren skriver:

[1] J.L.Berggren, "Episodes in the Mathematics og Medieval Islam", Springer-Verlag 1986.

[2] Det midterste lighedstegn gælder fordi: $\angle$DBZ er periferivinklen, hørende til korden DZ, og den er dobbelt så stor som centervinklen hørende til DZ og der er jo $\angle$ZOD. $\angle$ZOD spænder over $\frown$ZBD, som vi har vist er dobbelt så stor som $\frown$AC. Så $\angle$ZOD = 2 $\angle$AOC. Så korden DZ hørende til $\angle$ZOD er lig med korden hørende til 2 $\angle$AOC. Så ZD = 2AC. Det sidste lighedstegn er definitionen på sinus til en vinkel.

Nøglen til l-Wafa´s bevis ligger i observationen af, at eftersom vinklerne $\angle BTO$ og $\angle BHO$ er rette - ligger punkterne B,T,H og O på periferien af en cirkel med diameter BO - Euclid III.31[3]. Da ΔBHN og ΔBOT er ensvinklede gælder:

$$\frac{BH}{HN}=\frac{BO}{OT} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin(B)}{HN}=\frac{1}{\cos(A)} \quad \Leftrightarrow \quad HN=\sin(B)\cdot\cos(A)$$

ΔBNT og ΔBHO er ligeledes ensvinklede fordi vinklerne ved N og H er rette ; mens vinklerne ved T og O er ens, fordi de spænder over korden BH i cirklen gennem B,H,T og O. Vi får så:

$$\frac{BT}{TN}=\frac{BO}{OH} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin(A)}{TN}=\frac{1}{\cos(B)} \quad \Leftrightarrow \quad TN=\sin(A)\cdot\cos(B)$$

Vi har tidligere set, at TH = sin(AC) = sin(A+B). Så følger påstanden af de to ligninger ovenfor og det faktum at: TH = TN+NH.

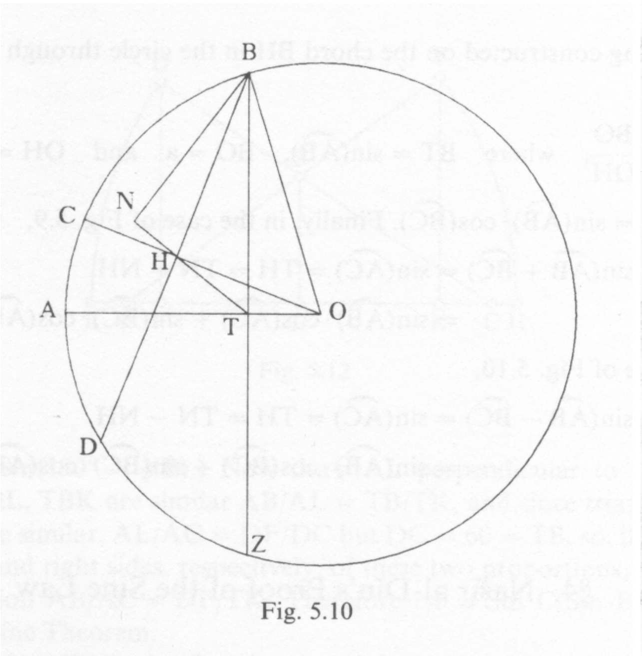
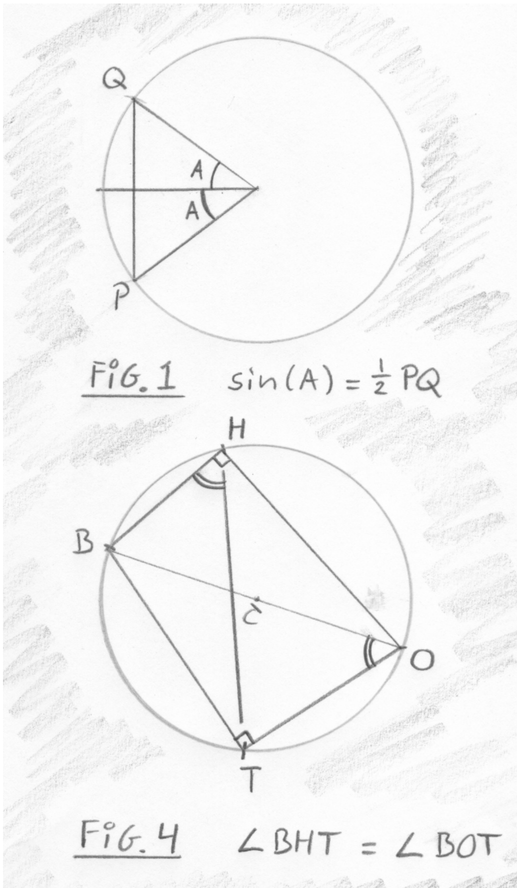


Fig. 5.10



3 Se figur 4. En periferivinkel på 90 grader spænder over cirklens diameter. Af figuren ses også, at $\angle BHT$ og $\angle BOT$ er periferivinkler, der spænder over samme bue og derfor lige store. Da ΔBHN og ΔBOT desuden begge er retvinklede må de være ensvinklede.