Matricer og lineære ligningssystemer

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Grete Ridder Ebbesen

Virum Gymnasium

Indhold

Kapitel 1

Matricer

1.1 Grundlæggende begreber

En matrix er et rektangulært skema af tal f.eks.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 117 \end{pmatrix}.$$

Matricen ovenfor er en (4×3)–matrix dvs. den består af fire rækker og tre søjler. Helt generelt er en matrix $\mathbf{A}$ med m rækker og n søjler, en $(m \times n)$–matrix, et skema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3\,n-1} & a_{3\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1\,1} & a_{m-1\,2} & a_{m-1\,3} & \cdots & a_{m-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & a_{m\,3} & \cdots & a_{m\,n-1} & a_{n\,n} \end{pmatrix}.$$

Tallene i skemaet kaldes matricens elementer og tallet i den $i'te$ rækker og $j'te$ søjle betegnes a_{ij}, og kaldes det ij'te element. I taleksemplet ovenfor er $a_{11} = 1$, $a_{23} = 2$. Rækken

$$a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; a_{i3} \;\; \ldots \;\; a_{i\,n-1} \;\; a_{in}$$

kaldes den i'te række og søjlen

$$\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$$

kaldes den $j'te$ søjle. Matricer betegnes med store bogstaver $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$,... og betegnes kort som (a_{ij}) og (b_{ij}).

Eksempel 1.1.1. En (3×2)–matrix kan skrives

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Eksempel 1.1.2. Matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 0 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

har to rækker og fem søjler og er dermed en (2×5)–matrix.

1.2 Regning med matricer

Hvis vi har to matricer med samme antal rækker og søjler, kan vi lægge de to matricer sammen. Det gør man ved at lægge sammen "plads for plads"

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 117 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -3 \\ 5 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 & -50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 9 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 67 \end{pmatrix}.$$

Den resulterende matrix kaldes summen af matricerne. Vi definerer

Definition 1.2.1. Lad $\mathbf{A} = (a_{ij})$ og $\mathbf{B} = (b_{ij})$ være to $(m \times n)$–matricer. Så defineres

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Matricen $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ kaldes summen af $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$.

Eksempel 1.2.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \text{-2} \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & \frac{7}{4} \\ 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \text{-2} \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & \text{-2} \end{pmatrix} \quad \text{giver ikke mening.}$$

Opgave 1.2.3. Udregn

$$\begin{pmatrix} 5 & \text{-1} \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & \text{-1} \end{pmatrix}.$$

For matrixaddition gælder følgende

Sætning 1.2.4. *Lad* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *og* $\mathbf{C}$ *være vilkårlige* $(m \times n)$*–matricer. Så vil*

(i) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.

(ii) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

(iii) Der findes en matrix $\mathbf{0}$*, kaldet nulmatricen, som opfylder*

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

for alle $\mathbf{A}$.

(iv) Til enhver matrix $\mathbf{A}$ *findes en modsat matrix* $-\mathbf{A}$*, så*

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

Bevis
De første to regler følger umiddelbart af de tilsvarende regneregler for tal, som giver

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (a_{ij}) + ((b_{ij}) + (c_{ij})) = (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}) \\ &= (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}) = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

Nulmatricen skal selvfølgelig være $(m \times n)$–matricen med 0 på alle pladser. Den modsatte matrix til matricen $\mathbf{A} = (a_{ij})$ får vi ved at skifte fortegn på elementerne i $\mathbf{A}$ dvs.

$$-\mathbf{A} = (-a_{ij}).$$

□

Sætningen viser, at $(m \times n)$–matricerne er en Abelsk gruppe med hensyn til addition, ligesom f.eks. $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{R}$.
Ved brug af den modsatte matrix, kan vi definere differensen $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ som

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}).$$

Denne måde at definere $-$ på er fælles for alle grupper, og regneoperationen $-$ er dermed bare en addition af det modsatte element. F.eks. er $7-4$ defineret som $7 + (-4)$.

Man kan også gange en matrix med et tal. Det gør man ved at gange alle elementer i matricen med tallet.

Definition 1.2.5. For $(m \times n)$–matricen $\mathbf{A} = (a_{ij})$ og tallet t defineres produktet $t \cdot \mathbf{A}$ ved

$$t \cdot \mathbf{A} = (ta_{ij}).$$

Eksempel 1.2.6.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}.$$

Regnereglerne for multiplikation med et tal er følgende

Sætning 1.2.7. *Antag* $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{B}$ *er* $(m \times n)$*–matricer og* s *og* t *er reelle tal. Så er*

(i) $(s \cdot t) \cdot \mathbf{A} = s \cdot (t \cdot \mathbf{A})$.

(ii) $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

(iii) $(s + t) \cdot \mathbf{A} = s \cdot \mathbf{A} + t \cdot \mathbf{A}$.

(iv) $s \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = s \cdot \mathbf{A} + s \cdot \mathbf{B}$.

Bevis
Regneregler følger let udfra de tilsvarende regneregler for reelle tal. □

Opgave 1.2.8. I følgende opgave er

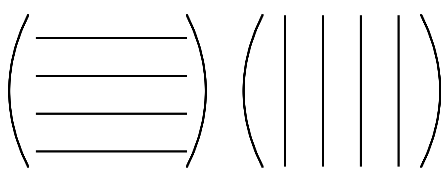
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Udregn

(i) $4 \cdot \mathbf{B}$ (ii) $-\mathbf{C}$ (iii) $3 \cdot \mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{E}$ (iv) $-\mathbf{D} + 2\mathbf{D}$

Vi vil også indføre produktet af to matricer. Det er ikke alle matricer, der kan ganges sammen. Hvis vi skal kunne gange $\mathbf{A}$ med $\mathbf{B}$, skal matricen $\mathbf{A}$ have lige så mange søjler, som $\mathbf{B}$ har rækker. Hvis $\mathbf{A}$ er en $(m \times n)$–matrix, skal $\mathbf{B}$ være en $(n \times p)$–matrix. Produktet $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ bliver en $(m \times p)$–matrix og hovedprincippet i multiplikationen kan illustres ved figuren



.

Vi vælger en række i den første matrix og en søjle i den anden. Så bevæger vi os hen gennem rækken og ned gennem søjlen, idet vi ganger de tilsvarende elementer i rækken og søjlen med hinanden og lægger produkterne sammen. Resultatet bliver et element i produktmatricen på pladsen med numre efter den første matrixs række og den anden matrixs søjle. Produktmatricen får lige så mange rækker som den første matrix og lige så mange søjler som den anden.
Vi illustrerer princippet med et eksempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 10 & 17 \\ 10 & 20 & 37 \end{pmatrix}.$$

Vi har ganget en (2×2)–matrix med en (2×3)–matrix og resultatet er en (2×3)–matrix. Selve definitonen på multiplikationen er

Definition 1.2.9. Lad $\mathbf{A} = (a_{ij})$ være en $(m \times n)$–matrix og $\mathbf{B} = (b_{ij})$ en $(n \times p)$–matrix. Så er produktet $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ $(m \times p)$–matricen givet ved

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}).$$

Matrixmultiplikation adskiller på et meget vigtigt punkt fra multiplikation af tal. Selv om man kan udregne $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, er det ikke sikkert, at man kan udregne $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, og hvis begge produkter kan udregnes, er de normalt ikke ens. Hvis vi f.eks. ser på matricerne $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

vil

$$\mathbf{A} {\cdot} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

mens

$$\mathbf{B} {\cdot} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ bliver en (2×2)–matrix og $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ en (3×3)–matrix.

Opgave 1.2.10. Udregn følgende produkter

(i) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$,

(ii) $\begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$,

(iii) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$,

(v) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -8 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Kontroller regningerne ved brug af en lommeregner (med TI-83+ og TI-89, se side 26).

Selv om produktet $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ og har $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ har samme størrelse, behøver de stadig ikke blive ens.

Opgave 1.2.11. Lad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Udregn

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sætning 1.2.12. *For multiplikation af matricer gælder regnereglerne*

(i) $(s \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = s \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (s \cdot \mathbf{B})$

(ii) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$

(iii) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$

(iv) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$

Bevis
Forbigås. □

Sammen med de øvrige regneregler bevirker ovenstående regler, at man stort set kan regne med matricer som med tal, men med en betydningsfuld forskel. Normalt er

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

Derfor må man ikke ændre på rækkefølgen af faktorerne i et matrixprodukt.

1.3 Kvadratiske matricer og determinant

En $(n \times n)$–matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kaldes også en *kvadratisk* matrix. I en kvadratisk matrix siges et elementet a_{ij} at stå i diagonalen, hvis $i = j$. Når $i \neq j$, står elementet uden for diagonalen. En kvadratisk matrix kaldes en *diagonalmatrix*, hvis alle elementerne uden for diagonalen er 0.

En diagonalmatrix med lutter 1-taller i diagonalen kaldes en enhedsmatrix og betegnes med $\mathbf{E}$ eller evt. $\mathbf{E}_{n,n}$, hvis man vil fremhæve antallet af rækker og søjler. Nedenfor ses eksempler på nogle diagonalmatricer, hvoraf den sidste er en enhedsmatrix.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

For en vilkårlig $(n \times n)$–matrix $\mathbf{A}$ vil

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_{n,n} = \mathbf{A} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{E}_{n,n} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

dvs. at multiplikation med $\mathbf{E}$ fra højre eller venstre ikke ændrer den oprindelige matrix. Denne egenskab svarer til egenskaben ved tallet 1, når vi ganger tal sammen.

Opgave 1.3.1. Sæt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad og \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Udregn

$$\mathbf{AE} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{EA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Til en kvadratisk matrix $\mathbf{A}$ knyttes et tal $det(\mathbf{A})$, kaldet *determinanten* af $\mathbf{A}$.
For en (2×2)–matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

er determinanten af **A** tallet

$$det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

For determinanten af **A** benyttes også en skrivemåde med lodrette streger

$$det(\mathbf{A}) = det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Eksempel 1.3.2. Ifølge definitionen bliver

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 10 - 3 = 7.$$

$$\det\begin{pmatrix} \text{-1} & 2 \\ 3 & \text{-6} \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-6) - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0.$$

For en (3×3)–matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

defineres determinanten af **A**, $det(\mathbf{A})$, som tallet

$$det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Determinanten skrives også

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Eksempel 1.3.3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot (-2) - (-1) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$= 6 + 8 + 6 - (-2) - (-8) - 18 = 12.$$

Hvis man ser på leddende i udtrykkene for determinanterne, kan man se, at de er produkter, som hver indeholder præcis én faktor fra hver række og én fra hver søjle, og alle leddene repræsenterer de mulige valg. Nogle produkter indgår med fortegnet $+$, andre med $-$. Vi vil ikke her komme inde på, hvad der bestemmer fortegnet.

Fremgangsmåden til beregning af determinanter af matricer, der er større end (3×3)–matricer er det samme, men der kommer rigtigt mange led ($n!$ for en $(n \times n)$–matrix). Der findes flere smarte metoder til at beregne determinanter, men vi vil stille os tilfreds med at kunne finde determinanter ved at bruge lommeregner (eller mat-programmer).

Opgave 1.3.4. Find følgende determinanter ved håndkraft

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Find følgende determinanter ved brug af lommeregner

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & -7 \\ -9 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 8 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 3 & 10 & -5 \\ 1 & 4 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

1.4 Invers matrix og matrixligninger

Hvis determinanten for en matrix $\mathbf{A}$ er forskellig fra nul, findes en matrix $\mathbf{A}^{-1}$, som opfylder

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

Matricen $\mathbf{A}^{-1}$ kaldes $\mathbf{A}$'s inverse matrix.

Opgave 1.4.1. Undersøg om matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

er den inverse til matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

For (2×2)–matricer er det nemt at finde den inverse matrix, hvis den findes, altså hvis determinanten ikke er nul. Antag

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

med $det(\mathbf{A}) = ad - bc \neq 0$. Så er den inverse matrix $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

For at vise, at dette er sandt, udregnes $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

Opgave 1.4.2. Vis, at $\mathbf{A}\ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ med $\mathbf{A}$ som i (1.1) og $\mathbf{A}^{-1}$ som i (1.2).

Den inverse matrix kan også skrives

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

For større matricer er der ikke nogen simple udtryk, der giver den inverse matrix. Hvis man har brug for den inverse matrix kan man få den udregnet på lommeregneren.

Opgave 1.4.3. Find den inverse matrix til matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

ved håndkraft.

Find den inverse matrix til matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 7 & -9 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

ved hjælp af lommeregneren.

Inverse matricer kan bruges til at løse matrixligninger. Hvis vi ser på ligningen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, hvor $\mathbf{A}$, $\mathbf{X}$ og $\mathbf{B}$ er matricer, kan vi isolere matricen $\mathbf{X}$, når $\mathbf{A}$ har en invers matrix. Hvis vi nemlig ganger med $\mathbf{A}^{-1}$ på begge sider, får vi

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B},$$

som ifølge regnereglerne er

$$(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}.$$

Da $\mathbf{A}^{\mathbf{-1}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$ og $\mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X}$, bliver

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}.$$

Her skal man være opmærksom på rækkefølgen af matricerne på højre side, og den skal respekteres.
Tilsvarende kan man løse ligningen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$, hvis $\mathbf{A}$ er invertibel. Løsningen bliver $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{B})$.

Kapitel 2

Lineære ligningssystemer

2.1 To ligninger med to ubekendte

Man kommer tit ud for at skulle løse to ligninger med to ubekendte som f.eks.

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 3 \\ 5x & + & 3y & = & 7 \end{array}$$

Løsningen er $x = 2$ og $y = -1$ og kan findes ved f.eks. at isolere y i den øverste ligning og sætte det fundne udtryk for y ind i den anden ligning og finde x. Den fundne x-værdi sættes så ind i udtrykket for y og y beregnes. Man kan i stedet bruge matricer ved at skrive ligningerne på en lidt anden måde

$$\begin{pmatrix} 2x+y \\ 5x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Venstre side kan nu omskrives til et produkt af matricer

$$\begin{pmatrix} 2x+y \\ 5x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

så vi alt i alt får en matrixligning

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Næste trin er finde den inverse til (2×2)–matricen. Vi sætter

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Så bliver

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 3 - 1 \cdot 5} \begin{pmatrix} 3 & \text{-1} \\ \text{-5} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \text{-1} \\ \text{-5} & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi ganger nu med $\mathbf{A}^{-1}$ fra venstre på begge sider af matrixligningen og får

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \text{-1} \\ \text{-5} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

så

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 7 \\ -5 \cdot 3 + 2 \cdot 7 \end{pmatrix},$$

dvs.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

som giver $x = 2$ og $y = -1$, hvilket det jo også gerne skulle.

Matricen $\mathbf{A}$ i eksemplet kaldes *koefficientmatricen*, da dens elementer er koefficienterne i ligningerne. Første række indeholder koefficienterne i den første ligning, og anden række indeholder koefficienterne i den anden ligning. Hvis determinanten af en koefficientmatrix er forskellig fra nul, har de to ligninger med to ubekendte præcis en løsning, som kan findes som i eksemplet ovenfor.

2.2 Højere ordens systemer, n lineære ligninger med n ubekendte

Hvis man har en tredje ubekendt z, skal vi have en ligning mere, så vi har 3 ligninger med x, y and z. Vi tager følgende ligninger

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & -1 \\ & & 3y & - & 2z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 8z & = & 7 \end{array}$$

som kan omskrives til matrixligningen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Koefficientmatricen er nu en 3×3 matrix, som vi igen kalder $\mathbf{A}$. Hvis $det(\mathbf{A}) \neq 0$, findes der præcis en løsning, som findes ved at gange matrixligningen igennem med $\mathbf{A}^{-1}$ fra venstre. Vi finder determinanten af $\mathbf{A}$ på lommeregner til 2 og den inverse matrix til

$$\begin{pmatrix} 11 & -9 & -5 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Vi ganger igennem med $\mathbf{A}^{-1}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -9 & -5 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

og ganger matricerne på højre side sammen (det kunne man jo også gøre på lommeregneren)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \cdot (-1) + (-9) \cdot 2 + (-5) \cdot 7 \\ (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 7 \\ (-3) \cdot (-1) + \frac{5}{2} \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot 7 \end{pmatrix}$$

og får

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -64 \\ 13 \\ \frac{37}{2} \end{pmatrix}.$$

Dvs. at løsningen bliver $x = -64$, $y = 13$ og $z = \frac{37}{2}$.

I det generelle tilfælde er et lineært ligningssystem med n ligninger og n ubekendte et system af n ligninger på formen

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Ligningssystemet kan skrives på matrixformen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

eller kort

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

hvor $\mathbf{A}$ er en $n \times n-$ matrix, $\mathbf{b}$ er en $n \times 1-$ matrix og $\mathbf{x}$ er den $n \times 1-$ matrix, der skal findes. Hvis $det\mathbf{A} \neq 0$, kan vi finde $\mathbf{A^{-1}}$ og ligningen har præcis en løsning $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{b}$$

hvor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Hvis $det\mathbf{A} = 0$ kaldes matricen singulær, og så har ligningssystemet enten ingen løsninger eller uendeligt mange løsninger. (Ligningsystemets evt. løsninger kan findes f.eks. ved brug af Gauss elimination.)

Opgave 2.2.1. Løs ligningssystemerne

$$\begin{aligned} 4x + y &= 7 \\ -x + 5y &= -7 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &= 7 \\ -2x_1 - 7x_2 &= -5 \end{aligned}$$

Opgave 2.2.2. Løs følgende 3 ligningssystemerne

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 3z & = & -4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= -2 \\ -6x_1 + 4x_2 + 11x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 11 \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 15 \\ 3x_2 + 7x_3 &= 17 \end{aligned}$$

Opgave 2.2.3. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 + 4x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 6x_4 &= 9 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 15 \end{aligned}$$

2.3 Totalmatricer og rækkeoperationer

Vi vil nu se på en måde til at løse m lineære ligninger med n ubekendte, når $m \leq n$. Vi ser altså på et system

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Når man skal løse ligningssystemet, foretager man nogle omformninger, der erstatter det oprindelige ligningssystem med et nyt, som har præcis de samme løsninger. Et ligningssystems løsninger ændres ikke, hvis vi

- skriver ligningerne i en anden rækkefølge
- ganger en ligning igennem med et tal forskelligt fra nul
- lægger et tal gange en af ligningerne til en anden af ligningerne

Disse omformninger svarer til nogle tilladte rækkeoperationer i ligningssystemets *totalmatrix* (se nedenfor). Først skriver man ligningssystemet på matrixform

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Totalmatricen fås ved at supplere matricen $\mathbf{A}$ med koefficienterne med en søjle med b'erne $b_1, ..., b_m$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

og en lodret streg, som markerer overgangen fra vestre side og højre side i ligningssystemet. De nævnte omformninger af ligningssystemet svarer til nogle ændringer i rækkerne i totalmatricen, som kaldes rækkeoperationer. Det er tilladt at

- lade to rækker skifte plads
- gange en række igennem med et tal forskelligt fra nul
- lægge et tal gange en række til en anden række

Ved brug af rækkeoperationer kan man omforme totalmatricen til en matrix med lutter 0'er under diagonalen. Det giver et ligningssystem, der er forholdsvis simpelt at løse ved "baglæns regninger".

Eksempel 2.3.1. Vi vil løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

som har totalmatricen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right).$$

Vi bytter først om på den øverste række R_1 og den nederste R_3 (skrives kort $R_1 \leftrightarrow R_3$)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 3 & 2 & 1 & 39 \end{array}\right).$$

Vi skaffer os nu 0'er under 1-tallet i den første søjle ved trække 2 gange den øverste række fra den anden række og 3 gange den øverste række fra den tredje række. Det er selvfølgelig tilladt, da det at trække 2 respektiv 3 gange en række fra, svarer til at lægge -2 respektiv -3 gange rækken til.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 2-2\cdot 1 & 3-2\cdot 2 & 1-2\cdot 3 & 34-2\cdot 26 \\ 3-3\cdot 1 & 2-3\cdot 2 & 1-3\cdot 3 & 39-3\cdot 26 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & -4 & -8 & -39 \end{array}\right).$$

De to operationen skrives kort ved hjælp af dynamiske lighedstegn. Skrivemåden $R_2 := R_2 - 2R_1$ betyder, at den nye R_2 fås som den gamle R_2 minus 2 gange R_1. Man skriver omformningen ovenfor kort

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 3 & 2 & 1 & 39 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 3R_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & -4 & -8 & -39 \end{array}\right)$$

Vi vil nu skaffe os et 0 i stedet for -4 i den nederste række. Det gør vi ved at lægge -4 gange R_2 til R_3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & -4 & -8 & -39 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 := R_3 - 4R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 12 & 33 \end{array}\right)$$

og endelig dividerer vi den sidste række igennem med 12

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 12 & 33 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 := \frac{1}{12}R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \end{array}\right).$$

Den nederste række i totalmatricen giver umiddelbart, at $z = \frac{11}{4}$. Række 2 giver, at $-y-5z = -18$ dvs. $y = 18-5z$. Da $z = \frac{11}{4}$, bliver $y = 18-5\cdot\frac{11}{4} = \frac{17}{4}$

og ifølge den øverste række, er $x = 26 - 2y - 3z = 26 - 2 \cdot \frac{17}{4} - 3 \cdot \frac{11}{4} = \frac{37}{4}$. Ligningssystemet har altså løsningen

$$x = \frac{37}{4}, \qquad y = \frac{17}{4}, \qquad z = \frac{11}{4}.$$

I eksemplet er $det\mathbf{A} \neq 0$, så vi kunne have brugt $\mathbf{A^{-1}}$ (fundet på lommeregner) til at finde løsningen. Eksemplet er valgt for illustrere metoden, når regningerne bliver pæne.

Eksempel 2.3.2. Matricen **A** for ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3x + 2z &= 2 \\ -2x + 14y + 8z &= 18 \\ 7x - 7y &= -5 \end{aligned}$$

har determinant 0. Derfor har ligningsystemet enten ingen løsning eller uendeligt mange løsninger. Vi opskriver totalmatricen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 14 & 8 & 18 \\ 7 & -7 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

og vi vil skaffe os nuller under diagonalen. Vi omformer totalmatricen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 14 & 8 & 18 \\ 7 & -7 & 0 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 := 3R_2 + 2R_1 \\ R_3 := 3R_3 - 7R_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 := \frac{1}{2}R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 21 & 14 & 29 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 := R_2 + R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 21 & 14 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Den nederste ligning $0x + 0y + 0z = 0$ er altid sand. Hvis vi sætter $z = t$ giver den anden række, at $21y + 14t = 29$ dvs. at $y = \frac{29-14t}{21} = \frac{29}{21} - \frac{2}{3}t$. Den øverste række giver, at $3x + 2t = 2$, altså $x = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}t$.

Ligningssystemet har dermed uendeligt mange løsninger, en for hvert reelt tal t, som er givet ved

$$x = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}t, \qquad y = \frac{29}{21} - \frac{2}{3}t, \qquad z = t.$$

Tallet t kaldes ofte en parameter, og udtrykkene ovenfor kaldes en parameterfremstilling af løsningen.

Eksempel 2.3.3. Hvis vi ændrer højre side i den nederste ligning i ligningssystemet i Eksempel 2.3.2 til 3

$$\begin{aligned} 3x + 2z &= 2 \\ -2x + 14y + 8z &= 18 \\ 7x - 7y &= 3 \end{aligned}$$

er matricen $\mathbf{A}$ den samme og determinanten stadig nul. Når man udfører de samme rækkeoperationer som før, får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 14 & 8 & 18 \\ 7 & -7 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 := 3R_2 + 2R_1 \\ R_3 := 3R_3 - 7R_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & -21 & -14 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 := \frac{1}{2}R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 21 & 14 & 29 \\ 0 & -21 & -14 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 := R_2 + R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 21 & 14 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right)$$

Den nederste ligning bliver nu $0x + 0y + 0z = 24$, som aldrig er sand. Ligningssystemet har dermed ingen løsninger.

Eksempel 2.3.4. Ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 14x_4 &= -6 \end{aligned}$$

svarer til totalmatricen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & -2 & 14 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2 := R_2 - R_1 \\ R_3 := R_3 - 2R_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & -6 & 8 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 := R_3 + 2R_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ligningen svarende til den nederste række er altid opfyldt, og vi har kun to andre ligninger. Hvis vi sætter $x_3 = s$ og $x_4 = t$, skal

$$2x_2 + 3s - 4t = 2, \qquad \text{altså} \qquad x_2 = 1 - \frac{3}{2}s + 2t$$

og

$$x_1 - x_2 + 2s + 3t = -1, \quad \text{altså} \quad x_1 = -1 - 2s - 3t + 1 - \frac{3}{2}s + 2t = -\frac{7}{2}s - t.$$

Løsningerne kan dermed skrives

$$x_1 = -\frac{7}{2}s - t \quad x_2 = 1 - \frac{3}{2}s + 2t \quad x_3 = s \quad x_4 = t$$

hvor s og t er relle tal. Disse kaldes også her parametre og vi har ovenfor angivet en parameterfremstillingen af løsningen.

Opgave 2.3.5. Løs ligningssystemerne

$$\begin{aligned} x - 2y &= -2 \\ 3x + y + 7z &= -1 \\ 6x - 5y + 7z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 11x_1 + 14x_2 - 21x_3 &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 7 \\ 2x - 2y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x + 2y + z + u &= 1 \\
2x - y + 2z - u &= 2 \\
3x - 4y + 3z - 3u &= 3
\end{aligned}
$$

Bilag A

Matricer på TI-lommeregnere

A.1 Indtastning

A.1.1 TI-83+

Matricer indtastes på TI-83+ ved at vælge $\boxed{\text{2ND}}$ og $\boxed{x^{-1}}$ og $\boxed{\text{EDIT}}$.Vælg matricens navn og tryk $\boxed{\text{Enter}}$. Så indtastes antal rækker og søjler og matricens elementer. Indtastningen afsluttes med $\boxed{\text{2ND}}$ og $\boxed{\text{QUIT}}$.

A.1.2 TI-89

Matricer indtastes på TI-89 ved at vælge $\boxed{\text{APPS}}$, $\boxed{\text{Data/Matrixeditor}}$ og $\boxed{\text{NEW}}$. Under Type vælges 2:Matrix og i variabel indtastes matricens navn f.eks. A (pil op og a). Slå $\boxed{\text{ALPHA}}$ fra og indtast antal rækker og søjler og $\boxed{\text{ENTER}}$. Nu indtastes **A**'s elementer og indtastningen afsluttes med $\boxed{\text{2ND}}$ og $\boxed{\text{QUIT}}$.

A.2 Regning med matricer og invers matrix

A.2.1 TI-83+

Når man har indtastet en matrix **A**, kan den indlæses i displayet ved at taste $\boxed{\text{2ND}}$, $\boxed{x^{-1}}$ og vælge $[A]$. Man kan nu lægge to indtastede matricer **A** og **B** sammen ved at indlæse **A**, trykke $\boxed{+}$, indlæse **B** og $\boxed{\text{ENTER}}$. På samme tilsvarende måde udregnes $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ og $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.
Den inverse matrix til **A** findes ved at indlæse **A** og trykke $\boxed{x^{-1}}$.

A.2.2 TI-89

Når man har indtastet to matricer **A** og **B** og f.eks. skal lægge dem sammen eller gange dem sammen , vælges $\boxed{\text{HOME}}$ og man skriver man blot $\mathbf{A}+\mathbf{B}$

eller $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ og $\boxed{\text{ENTER}}$. Tilsvarende med $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.
Den inverse matrix til $\mathbf{A}$ findes ved at skrive $\mathbf{A}$ og trykke $^\wedge - 1$.

A.3 MATH-menu og determinant

A.3.1 TI-83+

Når man indtaster $\boxed{\text{2ND}}$, $\boxed{x^{-1}}$ og vælger MATH kan man se en menu, hvor man bl.a kan vælge 1: det(. Gør man det med $\boxed{\text{ENTER}}$, står der det(i displayet. Indlæser man matricen og trykker $\boxed{\text{ENTER}}$, beregnes determinanten.

A.3.2 TI-89

Når man taster $\boxed{\text{2ND}}$ og $\boxed{\text{MATH}}$, vælger 4 : $\boxed{\text{ENTER}}$, får man en menu frem, hvor man bl.a. kan vælge 2 : *det*. Gør man det med $\boxed{\text{ENTER}}$, står der det(i basislinjen. Vi indtaster matricens navn ,) og $\boxed{\text{ENTER}}$, og determinanten er beregnet.

A.4 Matrixligninger

A.4.1 TI-83+ og TI-89

Hvis man skal løse matrixligningen $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ indtastes en totalmatrix med $\mathbf{A}$'s elementer efterfulgt af $\mathbf{B}$'s elementer f.eks. som $\mathbf{C}$. Under MATH-menuen vælges rref(, og matricen $\mathbf{C}$ indsættes. Tryk $\boxed{\text{ENTER}}$ og $\mathbf{X}$ læses som den matrix, der følger efter enhedsmatricen i displayet.