Kvadratrodsberegning ved hjælp af de fire regningsarter

Ni[1]

Tidligt i historien opstod et behov for at beregne kvadratrødder med stor nøjagtighed. Kvadratrødder optræder i forbindelse med retvinklede trekanter, men anvendes også til udarbejdelse af tabeller for funktionen sin(x). Sinusfunktionen er vigtig ved beregning af himmellegemers position. Nøjagtige beregninger af planetpositioner havde i de tidligste tider mest sin anvendelse ved udarbejdelse af kalendere og indenfor astrologi. Ideen bag algoritmen, der anvendes nedenfor, er den samme som matematikeren Kushyar anvendte omkring år 1000.

Beregning af √3478 med fem betydende cifre.

Indledende betragtninger:

Vi indfører betegnelsen R for den søgte kvadratrod og betegnelserne: A,B,C,D og E for de fem betydende ciffre.

$$\sqrt{3478} = R$$

$$10^2 < 3478 < 10^4 \;\Rightarrow\; 10 < R < 100$$

$$R = AB,CDE = A\cdot10^2 + B\cdot10^1 + C\cdot10^0 + D\cdot10^{-1} + E\cdot10^{-2}$$

Beregning af A:

$$\left(5\cdot10^1\right)^2 < 34,78\cdot10^2 < \left(6\cdot10^1\right)^2$$

så **A = 5**

Beregning af B:

B er heltalsværdien af tallet Bd.

$$\left(5\cdot10^1 + Bd\cdot10^0\right)^2 = 3478$$

$$\Updownarrow$$

$$25\cdot10^2 + 2\cdot5\cdot10^1\cdot Bd + Bd^2\cdot10^0 = 3478$$

$$\Updownarrow$$

$$100\cdot Bd + Bd^2 = 978$$

$$\Updownarrow$$

$$Bd\left(Bd + 100\right) = 978$$

$$8\cdot108 = 864 \;\wedge\; 9\cdot109 = 981$$

$$864 < 978 < 981$$

så **B = 8**

[1] Fil: Datadrev\Matematik\Algebra\Kvadratrod algoritme 160507.wpd

Beregning af C:

Til venstre nedenfor ses, hvordan C beregnes med samme metode, som den der blev brugt for at finde B. Til højre vises beregningen efter indførelse af tre symboler, som vi skal bruge i det følgende. T er tallet, hvis kvadratrod vi ønsker at finde - her 3478. Rapp er den approximation til kvadratroden af T, som vi får ved at anvende de allerede bestemte cifre og sætte de ukendte cifre til nul - her 58. Resten er forskellen mellem T og Rapp^2 - her 114.

$$\left(58 + Cd \cdot 10^{-1}\right)^2 = 3478$$
$$\Updownarrow$$
$$Cd(Cd \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 58) = 1140$$
$$\Updownarrow$$
$$Cd(Cd + 1160) = 11400$$
$$9 \cdot 1169 = 10521$$
$$10 \cdot 1160 = 11600$$

$$\left(Rapp + Cd \cdot 10^{-1}\right)^2 = T$$
$$\Updownarrow$$
$$Cd \cdot 10^{-1} \cdot (Cd \cdot 10^{-1} + 2 \cdot Rapp) = T - Rapp^2 = \text{Rest}$$
$$\Updownarrow$$
$$Cd \cdot 10^{-1} = \frac{\text{Rest}}{(Cd \cdot 10^{-1} + 2 \cdot Rapp)} \approx \frac{\text{Rest}}{2 \cdot Rapp}$$

så **C = 9**

Observation 1

I sidste linje til højre smides leddet Cd/10 væk, hvorved størrelsen Rest/2Rapp opstår. Fejlen vi begår er her mindre end en procent, og fejlen bliver mindre og mindre ved beregning af de følgende cifre. De muslimske matematikere benyttede sig af denne observation allerede omkring år 1000. C kan blive for stor på grund af denne fejl, men det afsløres ved, at den næste rest bliver negativ.

Størrelsen Rest/2Rapp beregnes ud fra de kendte størrelser alene ved hjælp af de fire regningsarter. Vi konkluderer:

Når de første to cifre er bestemt beregnes de følgende cifre ud fra størrelsen Rest/2Rapp. Hvis resten efterfølgende bliver negativ trækkes en fra det sidst bestemte ciffer.

Beregning af D:

$$Dd \cdot 10^{-2} \cdot (Dd \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 58{,}9) = 8{,}79$$
$$\frac{8{,}79}{2 \cdot 58{,}9} = 7{,}4618 \cdot 10^{-2}$$

Af den første linje ses, at Dd/100 $\approx$ Rest/2Rapp. Så sidste linje viser, at **D=7**. Ved at indsætte hhv. syv og otte på Dd´s plads i øverste linje ser vi, at det passer.

Beregning af E:

Først beregnes den nye rest. Dernæst beregnes Rest/2Rapp.

$$3478 - 58{,}97^2 = 0{,}5391$$

$$\frac{0{,}5391}{2 \cdot 58{,}97} = 0{,}00457$$

Vi sætter nu E lig med det første betydende ciffer i Rest/2Rapp, der er forskelligt fra nul - altså **E=4**. Herved kan vi begå en fejl, hvis det næste ciffer i virkeligheden er nul. Men fejlen vil afsløre sig ved, at næste rest bliver negativ.

De følgende cifre beregnes på samme måde.

Ideen med anvendelse af størrelsen Rest/2Rapp har været anvendt i mange metoder til kvadratrodsberegning i historiens løb - også i det danske skolesystem. Selve fremgangsmåden har så været indrettet, så man kom til at regne med hele tal, og så man enkelt kunne holde styr på cifres tipotens/position. Vi kender noget lignende fra divisionsmetoden, hvor vi stiller tallene op under hinanden og rykker en plads, hver gang vi tager fat på et nyt ciffer.

Det viser sig, at man kun behøver et godt gæt på første ciffer, for at kunne beregne de følgende ud fra første betydende ciffer i Rest/2Rapp. På de næste side bevises, at det går godt.

Diverse betegnelser og definitioner:

T: Tallet hvis kvadratrod vi ønsker at bestemme.
R: Kvadratroden af T
R_{app}: Den beregnede tilnærmede værdi til R

Rest = T-$R_{app}{}^2$
R = R_{app} + Korr

I det følgende mærkes størrelser, der hører til to på hinanden følgende iterationer med henholdsvis GL og NY.

Sætning:

$$|GL\mathrm{Korr}| < |GL\mathrm{R}_{app}| \quad \wedge \quad NY\mathrm{R}_{app} = GL\mathrm{R}_{app} + \frac{GL\mathrm{Rest}}{2 \cdot GL\mathrm{R}_{app}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{\mathrm{NYKorr}}{GL\mathrm{Korr}}\right| < \frac{1}{2}$$

Sætningen siger altså, at hvis vores udgangspunkt (GLR_{app}) afviger mindre end 100%, og den nye approximation beregnes ved at lægge GLRest/(2 GLR_{app}) til den forgående approximation; så vil vi i det mindste halvere afvigelsen i hvert iterationsskridt. Faktisk bliver forholdet mellem på hinanden følgende korrektioner mindre og mindre - konvergenshastigheden stiger.

Bemærk, at den nye approximation beregnes ud fra den gamle alene ved hjælp af de fire regningsarter.

Eksempel:

T	R
7	2.645751311

Rapp	Rest	Korr	Rest/2Rapp	NyKorr/GlKorr
1.5	4.75	1.145751	1.583333333	
3.083333333	-2.506944444	-0.43758	-0.406531532	-0.381917104
2.676801802	-0.165267886	-0.03105	-0.0308704	0.070959247
2.645931402	-0.000952982	-0.00018	-0.000180084	0.005799923
2.645751317	-3.24304E-08	-6.1E-09	-6.12876E-09	3.40316E-05
2.645751311	0	0	0	0
B12+E12	B4-B13^2	C4-B13	C13/(2*B13)	D13/D12
B13+E13	B4-B14^2	C4-B14	C14/(2*B14)	D14/D13

I de to nederste rækker er formlerne vist i stedet for resultatet af beregningerne. Bemærk, hvor hurtigt approximationerne konvergerer mod den korrekte værdi. Ni betydende cifre efter fem gennemløb!

Observation 2

Hvor kommer ideen til algoritmen fra? Det skulle fremgå af udregningen nedenfor.

$$\left(\mathrm{R}_{\mathrm{app}} + \mathrm{Korr}\right)^2 = R^2 = T$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{Korr}^2 + 2\cdot\mathrm{Korr}\cdot\mathrm{R}_{\mathrm{app}} = T - \mathrm{R}_{\mathrm{app}}{}^2 = \mathrm{Rest}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{Korr}\cdot\left(\mathrm{Korr} + 2\cdot\mathrm{R}_{\mathrm{app}}\right) = \mathrm{Rest}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{Korr} = \frac{\mathrm{Rest}}{\left(\mathrm{Korr} + 2\cdot\mathrm{R}_{\mathrm{app}}\right)} \rightarrow \frac{\mathrm{Rest}}{2\cdot\mathrm{R}_{\mathrm{app}}} \quad \mathit{for} \quad \mathrm{Korr} \rightarrow 0$$

Bevis:

$$\mathrm{NYKorr} = GL\mathrm{Korr} - \frac{GL\mathrm{Rest}}{2\cdot GL\mathrm{R}_{\mathrm{app}}} = GL\mathrm{Korr} - \frac{T - \left(GL\mathrm{R}_{\mathrm{app}}\right)^2}{2\cdot GL\mathrm{R}_{\mathrm{app}}} =$$

$$GL\mathrm{Korr} - \frac{R^2 - \left(GL\mathrm{R}_{\mathrm{app}}\right)^2}{2\cdot GL\mathrm{R}_{\mathrm{app}}} = GL\mathrm{Korr} - \frac{\left(R - GL\mathrm{R}_{\mathrm{app}}\right)\cdot\left(R + GL\mathrm{R}_{\mathrm{app}}\right)}{2\cdot GL\mathrm{R}_{\mathrm{app}}} =$$

$$GL\mathrm{Korr}\cdot\left(1 - \frac{R + \left(GL\mathrm{R}_{\mathrm{app}}\right)}{2\cdot GL\mathrm{R}_{\mathrm{app}}}\right) = GL\mathrm{Korr}\cdot\left(\frac{GL\mathrm{R}_{\mathrm{app}} - R}{2\cdot GL\mathrm{R}_{\mathrm{app}}}\right) =$$

$$-GL\mathrm{Korr}\cdot\frac{GL\mathrm{Korr}}{2\cdot GL\mathrm{R}_{\mathrm{app}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{\mathrm{NYKorr}}{GL\mathrm{Korr}}\right| = \left|\frac{GL\mathrm{Korr}}{2\cdot GL\mathrm{R}_{\mathrm{app}}}\right| < \frac{1}{2}$$