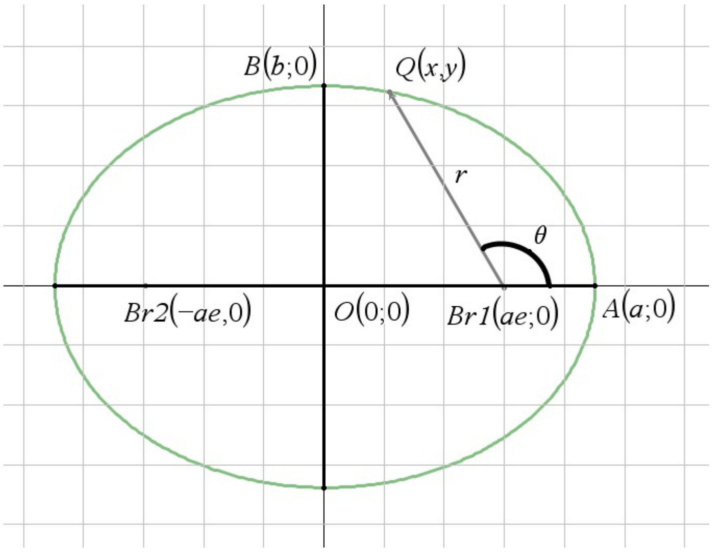
Planetbevægelse og Ellipser

Jacob Nielsen



Figur 1.1

Johannes Kepler fandt ved analyse af Tyge Brahes fremragende astronomiske observationer, at planeterne i solsystemet bevæger sig om solen i ellipseformede baner med solen i ellipsens ene brændpunkt. I denne note skal vi se, hvordan man kommer fra Newtons love til bevægelsesligningene, der beskriver ellipsebevægelsen.

En ellipse kan beskrives ved ligningen nedenfor[1]

$$1.1 \quad r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

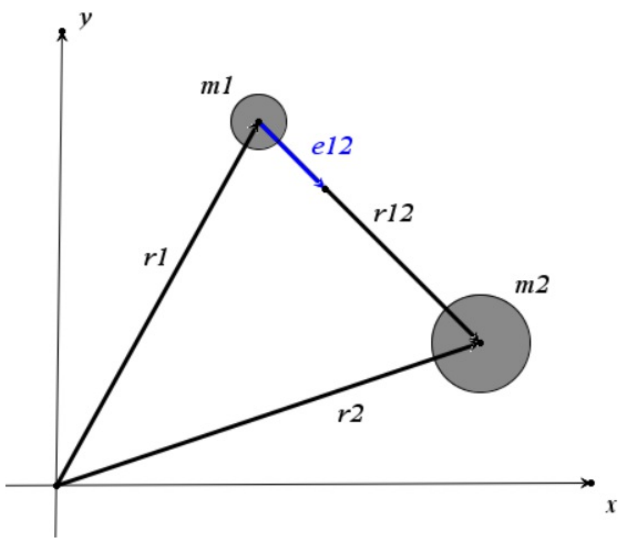
$$1.2 \quad p = a \cdot e^2$$

$$1.3 \quad b = a \cdot \sqrt{1 - e^2}$$

r er afstanden fra et af ellipsens brændpunkter B_1 til et punkt Q på ellipsen. θ er vinklen mellem ellipsens storakse og linjen gennem B_1 og Q. a er længden af ellipsens halve storakse. b er længden af den halve lilleakse. Excentriciteten e er defineret ud fra ligning 1.3, og den er et mål for, hvor aflang ellipsen er og p er ellipsens parameter. Er der tale om en planetbane, så kan p beregnes ud fra gravitationskonstanten, massen af planeten og solen og rotationsenergien i bevægelsen.

[1]Se for eksempel Ole Witt-Hansen: olewitthansen.dk/Matematik/Elementær_matematik_keglesnit.pdf

Bevægelse i Centralt Kraftfelt



Newtons gravitationslov giver størrelsen af tyngdekraften mellem to masser med indbyrdes afstand r. Størrelsen af kraften er givet ved udtrykket i ligning 2.1 nedenfor. Kraften er rettet langs forbindelseslinjen mellem de to masser. Anvendes Newtons anden og tredje lov på de to masser fremkommer bevægelsesligningen 2.4. I ligningen er det understreget, at vektoren e_{12} er en funktion af tiden, idet den i almindelighed roterer.På grund af denne rotation kommer den fiktive Centrifugalkraft ind i billedet på samme måde som, når vi bruger Newtons anden lov i koordinatsystemer, der ligger fast i forhold til jorden.

Det vi har opnået i ligning 2.4 er, at reducere et topartikelprobelem til et enpartikelproblem, hvor partiklen har massen μ - den såkaldte reducerede masse for systemet.

2.1 $$F_{tyngde} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \wedge \quad r(t) = \left|\vec{r_1} - \vec{r_2}\right|$$

2.1 $$\mathrm{m}_1 \cdot \frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} = F_{tyngde} \cdot \vec{e}_{12} \quad \wedge \quad \mathrm{m}_2 \cdot \frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} = -F_{tyngde} \cdot \vec{e}_{12} \quad \wedge \quad \vec{e}_{12} = -\frac{\vec{r_1} - \vec{r_2}}{\left|\vec{r_1} - \vec{r_2}\right|} = -\frac{\vec{r_1} - \vec{r_2}}{r} \Leftrightarrow$$

2.3 $$\frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} = \frac{1}{\mathrm{m}_1} F_{tyngde} \cdot \vec{e}_{12} \quad \wedge \quad \frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} = -\frac{1}{\mathrm{m}_2} F_{tyngde} \cdot \vec{e}_{12} \quad \Leftrightarrow$$

2.3 $$\frac{d^2\left(\vec{r_1} - \vec{r_2}\right)}{dt^2} = \left(\frac{1}{\mathrm{m}_1} + \frac{1}{\mathrm{m}_2}\right) F_{tyngde} \cdot \vec{e}_{12} \quad \Leftrightarrow$$

2.4 $$\frac{d^2\left(-r(t)\vec{e}_{12}(t)\right)}{dt^2} = \frac{1}{\mu} F_{tyngde} \cdot \vec{e}_{12}(t)$$,hvor vi har indført:

2.5 $$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

Banekurvens form kan findes uden at løse ligning 2.4. ved at antage, at den mekaniske energi er konstant. Det er udtrykt i ligning 2.6 på næste side.

Det er praktisk, at beskrive banekurven i de polære koordinater (r,θ), der er vist på figur 1.1. Det fører til ligning 2.10.

2.6 $$E_{mek} = \frac{1}{2}\mu \cdot \vec{v}^2 - \frac{k}{r(t)} \quad \wedge \quad k = G \cdot m_1 \cdot m_2$$

2.7 $$E_{mek} = \frac{1}{2}\mu \cdot \left(\left(\frac{dr(t)}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\omega(t) \right)^2 \right) - \frac{k}{r(t)} \quad \wedge \quad k = G \cdot m_1 \cdot m_2$$

2.8 $$E_{mek} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dr(t)}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r(t)^2} - \frac{k}{r(t)}$$

2.9 $$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{dr(\theta)}{d\theta}\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega \cdot \frac{dr(\theta)}{d\theta} = \frac{L}{\mu \cdot r(\theta)^2}\frac{dr(\theta)}{d\theta}$$

2.10 $$E_{mek} = \frac{L^2}{2\mu \cdot r(\theta)^4}\left(\frac{dr(\theta)}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r(\theta)^2} - \frac{k}{r(\theta)}$$

2.11 $$r(\theta) = \frac{p}{e\cos(\theta) + 1} \quad , \quad p = \frac{L^2}{k\mu} \quad \wedge \quad e \text{ er en konstant.}$$

2.12 $$\mathrm{L} = \mu \cdot \mathrm{r}(\theta)^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad \Leftrightarrow$$

2.13 $$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L \cdot (1 + e\cos(\theta))^2}{\mu \cdot p^2}$$

2.14 $$\mathrm{t} = \frac{L^3}{2\mu k^2}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{3}\tan^3\left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$$

Ved omskrivningen fra ligning 2.6 til 2.7 er ligningerne p4 og p5 anvendt. Ligning 2.10 har løsningen, der er opskrevet i ligning 2.11[2]. Hvis e ligger mellem nul og en er det en ellipse. Hvis vi har brug for at kende planetens position som funktion af tiden, så må funktionen θ(t) bestemmes ved at løse differentialligningen 2.13. Sammenhængen mellem tiden og θ er givet ved ligning 2.14[3].

Vi har hermed set, hvordan Newtons anden lov fører til, at planeter kan bevæge sig i om hinanden i ellipseformede baner. Det er **Keplers første lov**.

Keplers anden lov følger af loven om impulsmomentbevarelse[4].

Keplers tredje lov kan vises ud fra 2.13[5].

---

[2] Ligningen er løst i Eriksson et al., "Fysik 1, Mekanik og Värmlære", Almqvist & Wiksell, 1970, p.185-186.

[3] Se for eksempel:Goldstein, "Classical Meshanics", 2.edition, Addison-Wesley 1980, p.99.

[4] Se for eksempel: Staffansson et al., "Fysik i Grundtræk 2A Mekanik", Munksgaard 1973, p.61.

[5] Se for eksempel:Goldstein, "Classical Meshanics", 2.edition, Addison-Wesley 1980, p.99-100.

Keplers love

Johannes Kepler (1571-1630) blev i år 1600 elev hos Tyge Brahe (1546-1601) i Pragh, og ved sidstnævntes død i 1601 kejserlig astronom. Kepler stiftede således bekendtskab med Tyge Brahes observationsdata, der på den tid var enestående med hensyn til nøjagtighed og omfang. Gennem studier af specielt Brahes observationer af Mars´ bane viste Kepler ad induktiv vej tre love om planeternes bevægelse om solen. Kepler sad møjsommeligt og prøvede at finde en matematisk sammenhæng i de enorme mængder af observationsdata. Det tog otte års møjsommeligt arbejde, at komme frem til de første to love.

Først i kraft af Newtons (1642-1727) arbejde offentliggjort i "Principia" 1687 kunne Keplers love udledes deduktivt; det vil sige ud fra mere grundlæggende love alene ved hjælp af matematik og logik.

Kepler opstillede for øvrigt i 1604 principperne for fremstilling af en kikkert ved hjælp af to samlelinser. I 1608 behandledes i Haag en patentansøgning, omhandlende en kikkert, fra to nederlandske brillemagere Lippershey og van Alkmaar. Galilei hørte rygtet herom i 1609 og i 1610 opdagede han ved hjælp af en kikkeert af eget fabrikat måner omkring Jupiter. Galilei sluttede, at jorden måtte udføre en lignende bevægelse om solen. Det vidste Kepler altså allerede, men han gik mere stille med dørene end Galilei, der som bekendt kom i konflikt med kirken, fordi han argumenterede for det heliocentriske verdensbillede.

Nicolaus Kopernikus (1473-1543) lægger, på grund af sine tanker offentliggjort 1543 i "De Revolutionibus Orbium Coelestium Libri", navn til "Den Kopernikanske Revolution", det vil sige det heliocentriske verdensbilledes sejr over det geocentriske. Der var ikke tale om nogen revolution, i betydningen: pludselig voldsom omvæltning, og nådestødet fik det geocentriske verdensbillede først i kraft af Keplers og Galileis arbejde, hvor Kopernikus´ ideer blev eksperimentelt bekræftet. Fra dette tidspunkt måtte det virke stærkt utroværdigt på oplyste mennesker, at tale for et geocentrisk verdensbillede. Her er samspillet mellem Galileis grundlæggelse af den naturvidenskabelige metode og de øvrige intellektuelle strømninger i renæssancen naturligvis centralt.

Keplers første lov (1609)

Planeterne bevæger sig i ellipsebaner med solen i det ene brændpunkt.

Keplers anden lov (1609)

Forbindelseslinjen mellem solen og planeten overstryger i lige store tidsrum lige store arealer.

Keplers tredje lov (1618)

Idet planetens omløbstid betegnes T og den halve storakse a gælder der:

$$\frac{T^2}{a^3} = k$$

k er en konstant, der kun afhænger af centrallegemets masse.

Polære koordinater

Istedet for cartesiske koordinater (x;y) kan punkterne i planen tilordnes polære koordinater (r;θ), hvor r er stedvektorens længde og θ er vinklen fra førsteaksen til stedvektoren regnet positiv i retning mod uret[6]. Punktets stedvektor som funktion af tiden t er så givet ved ligning p1.

ligning p1: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$

ligning p2: $\vec{r}(t+\Delta t) = \begin{pmatrix} x(t+\Delta t) \\ y(t+\Delta t) \end{pmatrix} = r(t+\Delta t) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta+\Delta\theta) \\ \sin(\theta+\Delta\theta) \end{pmatrix} \approx (r+\Delta r) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) - \Delta\theta \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) + \Delta\theta \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \approx$

$r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -\Delta\theta \cdot \sin(\theta) \\ \Delta\theta \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} + \Delta r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$

ligning p3: $\frac{\overrightarrow{\Delta r}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \cdot r \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} + \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \cdot r \cdot \hat{\vec{e}}_r + \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \vec{e}_r$

ligning p3: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot r \cdot \hat{\vec{e}}_r + \frac{dr}{dt} \cdot \vec{e}_r = \omega(t) \cdot r \cdot \hat{\vec{e}}_r + \frac{dr}{dt} \cdot \vec{e}_r$

ligning p4: $v^2(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) = \left(\omega(t) \cdot r \cdot \hat{\vec{e}}_r + \frac{dr}{dt} \cdot \vec{e}_r \right) \cdot \left(\omega(t) \cdot r \cdot \hat{\vec{e}}_r + \frac{dr}{dt} \cdot \vec{e}_r \right) = r^2 \omega^2(t) + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$

ligning p5: $\vec{L} \equiv m \cdot \vec{r}(t) \text{ x } \vec{v}(t) = m \cdot r \cdot \vec{e}_r \, x \left(\omega(t) \cdot r \cdot \hat{\vec{e}}_r + \frac{dr}{dt} \cdot \vec{e}_r \right) = m \cdot \omega \cdot r^2 \cdot \vec{e}_r \, x \, \hat{\vec{e}}_r + m \cdot r \cdot \vec{e}_r \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \vec{e}_r \, x \, \vec{e}_r =$

$m \cdot \omega \cdot r^2 \cdot \vec{e}_r \, x \, \hat{\vec{e}}_r = m \cdot r^2 \cdot \vec{\Omega} \quad , \quad \vec{\Omega} \equiv \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{e}_r \, x \, \hat{\vec{e}}_r$

[6] Se eventuelt figur 1.1.